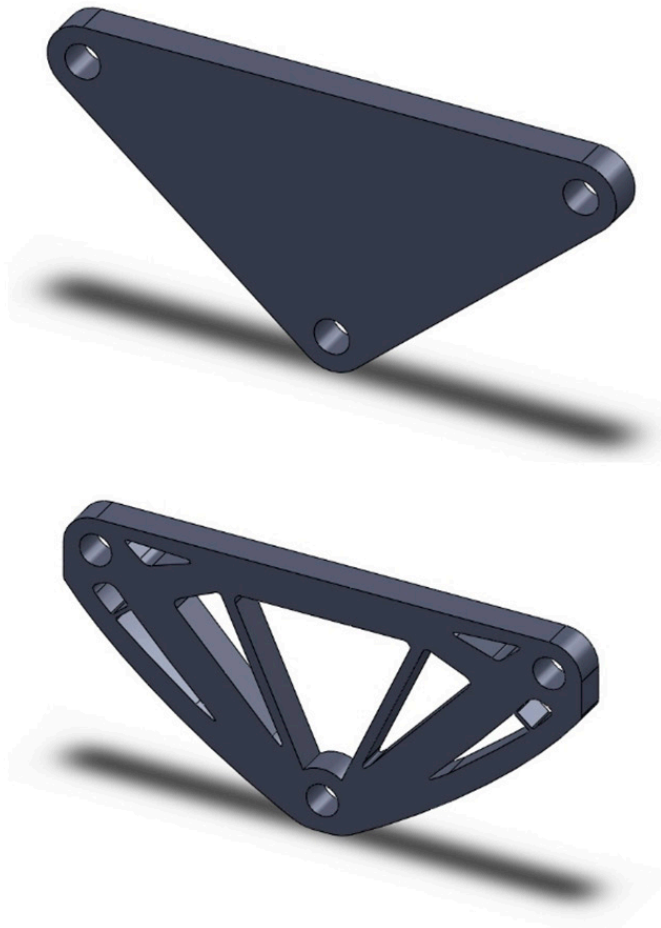


Optimización topológica aplicada al diseño de componentes estructurales mecánicos de peso reducido

CARLOS A. MEZA¹
FERNANDO TAMAYO²
EDIGUER E. FRANCO²

Resumen

En este trabajo se presenta una implementación de la técnica de optimización topológica (OT) aplicada al diseño de elementos estructurales mecánicos de peso reducido. La OT es un método numérico que ha captado el interés de ingenieros y científicos en los últimos años, pues permite la síntesis de estructuras con valores óptimos de uno o varios de sus parámetros físicos. El problema de máxima rigidez con restricción de volumen consiste en encontrar la distribución de material en un dominio donde se tenga dicha máxima rigidez, para determinada carga aplicada, restringiendo el volumen final del material usado en la estructura. Fue implementado un algoritmo de solución usando elementos finitos planos de cuatro nodos e interpolación lineal para la discretización del dominio y programación lineal secuencial para la solución del problema de optimización no lineal y multivariado. La validez de los resultados fue comprobada solucio-



⁽¹⁾ Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad del Valle. Cll. 13 # 100 - 00. Cali, Valle del Cauca, Colombia.

⁽²⁾ Programa de Ingeniería Mecánica, Universidad Autónoma de Occidente. Cll. 25 # 115 - 85. Cali, Valle del Cauca, Colombia.

Fecha de recepción: 23/02/2015 – Fecha de aceptación: 30/06/2015.

nando algunos casos test bien conocidos. Finalmente, el algoritmo se usó para rediseñar una pieza mecánica existente, donde la OT permitió una reducción de peso del 24 % manteniendo un factor de seguridad comparable. La reducción de peso en estructuras mecánicas es importante por su impacto en el ahorro de energía al reducir la inercia en máquinas y vehículos, además de la posible reducción de costos de fabricación.

Palabras clave: diseño mecánico, optimización topológica, reducción de peso.

Abstract

In this work, an implementation of the topological optimization technique (TOPOPT) to the design of lightweight mechanical parts is presented. The TOPOPT is an interesting numerical technique that allows the synthesis of mechanical structures with optimal values of one or more physical parameters. The maximum stiffness problem is the synthesis of a structure with maximum stiffness, for a certain load, restricting the final volume of the structure. A solution algorithm that uses finite elements of four nodes and linear interpolation for discretization of the domain and sequential linear programming for the solution of the non-linear multivariate optimization problem was developed. Results provided by the algorithm was validated using test problems with well-known solution. Finally, the algorithm was used to redesign a mechanical part, achieving a weight reduction of 24% with a comparable factor of safety. This weight reduction in mechanical structures is important because the energy saving in the operation of machinery and vehicles, furthermore, it is also possible a reduction in the manufacturing costs.

Keywords: mechanical design, topological optimization, weight reduction.

1. Introducción

La optimización topológica (OT) es una herramienta matemática que le permite al diseñador sintetizar topologías óptimas. En Ingeniería Me-

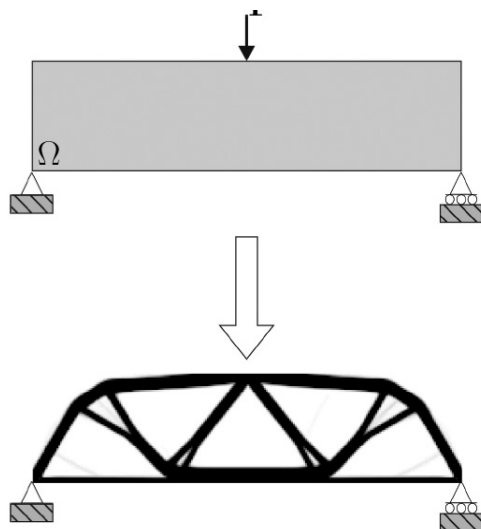
cánica se entiende como topología óptima a una pieza o parte mecánica diseñada especialmente para maximizar o minimizar alguna característica deseada. Por ejemplo, cuando se diseña el ala de un avión se desea obtener el menor peso posible, asegurando una rigidez y resistencia adecuadas. El problema de la máxima rigidez con restricción de volumen es de gran importancia en Ingeniería Mecánica e Ingeniería de Estructuras, pues permite reducir el peso final del elemento mecánico o estructural, conservando su rigidez y funcionalidad. Partes mecánicas de bajo peso implican menores costos por material y menor consumo de combustible en el caso de vehículos de transporte [1]. En general, la reducción de la inercia en partes en movimiento, sea maquinaria o vehículos, disminuye la cantidad de energía necesaria para su operación.

La OT es un campo de investigación de rápido crecimiento, donde intervienen distintas áreas como son las matemáticas, la mecánica y las ciencias computacionales, y que cuenta con importantes aplicaciones prácticas en la industria y en el sector de manufactura. En la actualidad, la OT es usada en las industrias aeroespacial, automotriz, de obras civiles, entre otras. Además tiene un papel muy importante en el campo de las micro y nanotecnologías, principalmente en el diseño de mecanismos flexibles [1].

La Figura 1 muestra un dominio bidimensional (Ω) con restricciones (apoyos) en las esquinas inferiores y una carga (F) en la mitad del lado superior. Entonces, el enunciado de un problema de máxima rigidez (o mínima flexibilidad) con restricción de volumen es:

¿Cuál es la distribución de material en el dominio (Ω) que proporciona la máxima rigidez (o mínima flexibilidad) para el estado de carga impuesto y un máximo volumen de material determinado?

En la Figura 1 también se muestra la topología óptima obtenida para el estado de carga mostrado y el volumen final de la estructura igual al 40 % del volumen inicial. Este resultado muestra una topología familiar, pues muchos puentes de barras articuladas presentan esta configuración, llamada viga Messerschmitt-Bölkow-Blohm (MBB).

Figura 1. Problema de máxima rigidez con restricción de volumen

Fuente: elaboración propia.

Existen muchas otras aplicaciones de la OT en la Ingeniería Mecánica, como son: diseño de mecanismos flexibles y micromecanismos [2, 3, 4], diseño de MEM (Sistemas Micro-Electro-Mecánicos) [5, 6], diseño de materiales con coeficiente de Poisson o coeficiente de expansión térmica negativos (metamateriales) [7], resonadores, aletas para intercambio de calor, entre otras aplicaciones. Además, están comenzando a aparecer trabajos sobre aplicación de la técnica en la dinámica de fluidos [8], tales como diseño de mezcladores, muros de contención de represas [9], perfiles de ala de avión [10], entre otros. Un caso famoso donde se empleó exitosamente la OT es el diseño de las alas de los aviones Airbus A380, que por medio de OT quedaron considerablemente más livianas que las diseñadas por medios convencionales, ahorrando en combustible y al mismo tiempo aumentando la carga útil de la aeronave [1].

En este trabajo se implementó la solución del problema de máxima rigidez con restricción de volumen usando OT. Este tema incluye la solución de problemas de tensión plana por el método de los elementos finitos [11] y técnicas de optimización multivariable y no lineal [12]. Con base en esta teoría, un algoritmo de solución fue implementado en Matlab. Como la solución es un proceso iterativo donde se solucionan uno o más problemas de elementos finitos por cada iteración, el costo computacional es muy alto. Por tanto, la eficiencia de los métodos numéricos debe

ser tenida en cuenta durante la programación, de lo contrario la solución puede tomar un tiempo demasiado prolongado. Finalmente, el algoritmo desarrollado fue usado para sintetizar una serie de estructuras óptimas y analizar el efecto de los parámetros de cálculo más importantes. Además, fue realizado el proceso de rediseño de una pieza mecánica, mostrando un resultado satisfactorio en términos de peso y resistencia.

2. Implementación numérica

El sistema de ecuaciones lineales que se obtiene en la solución de un problema de elasticidad lineal usando el método de los elementos finitos (MEF) es de la forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{f} \quad (1)$$

Donde \mathbf{u} y \mathbf{f} son los desplazamientos y fuerzas externas aplicadas en los nodos, respectivamente. El término \mathbf{K} es la matriz de rigidez global, que está dada por la suma coherente (también llamado proceso de ensamble de la matriz global) de las matrices de rigidez de cada elemento:

$$\mathbf{K}=\sum_e \mathbf{K}^e \text{ para } i=1,2,\dots,N_e \quad (2)$$

Donde N_e es el número total de elementos finitos usados para discretizar el dominio. La matriz de rigidez de cada elemento se obtiene de la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}^e=\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (3)$$

Donde \mathbf{D} es la matriz de material para el caso de esfuerzo plano [13], \mathbf{B} es la matriz de las derivadas de las funciones de forma y Ω representa el dominio de diseño [14].

Como la idea de la OT es distribuir cierta cantidad de material en el dominio, de tal forma que la rigidez sea la máxima posible, se necesita un mecanismo para modelar la presencia o ausencia de material. En este trabajo se usó el modelo de material sólido isotrópico con penalización (SIMP). En este modelo, cada elemento finito tiene asociada una variable llamada pseudodensidad (ρ), que multiplica la matriz de rigidez del elemento de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{K}}_i^e=\rho_i^p \mathbf{K}_i^e \quad (4)$$

Donde p es un factor de penalización usado para reducir los valores intermedios de las pseudodensidades. Estas presentan valores entre cero y uno, donde cero representa ausencia total de material y uno representa la presencia del material de base usado en el diseño. Por cuestiones de implementación numérica, las pseudodensidades no pueden tener valores discretos de 0 y 1, sino una variación continua entre estos dos valores

$$(0 \leq p \leq 1).$$

La función objetivo del problema de optimización es la energía de deformación, que considerando el modelo del material SIMP se escribe de la siguiente manera [1, 15]:

$$c(p) = \sum_{i=1}^{N_e} \rho_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^e \mathbf{u}_i \quad (5)$$

La energía de deformación aumenta a medida que la estructura se deforma, por tanto, el proceso de optimización consiste en hallar el conjunto de valores ρ_i que la minimizan.

Para la solución del problema de optimización se usó la programación lineal secuencial (PLS), con las pseudodensidades como variables de proyecto. La PLS soluciona un problema de optimización no lineal por medio de sucesivos problemas lineales, cada uno de ellos solucionado por el método de programación lineal (PL). En cada iteración de la rutina del PLS se minimiza la función objetivo en un intervalo establecido, definido por los límites móviles. El resultado obtenido se usa en la siguiente iteración como valor inicial, y así sucesivamente hasta alcanzar el punto óptimo.

La linealización de la función objetivo se realiza tomando los dos primeros términos de su expansión en serie de Taylor. Descartando los términos constantes que aparecen, solamente queda la derivada de la función objetivo con respecto a las variables de proyecto multiplicada por su respectiva variable de proyecto:

$$C_L(p) = \sum_{i=1}^{N_e} \rho_i \left| \frac{\partial c}{\partial \rho_i} \right|_{p=p_0} = \sum_{i=1}^{N_e} \rho_i p \rho_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^e \mathbf{u}_i \quad (6)$$

Entonces, el problema de optimización se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C_L(p) \\ &\text{Sujeto a:} && \mathbf{K}(p)\mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & && \sum_{i=1}^{N_e} v_i \rho_i \leq V \\ & && \rho_{\min} \leq (1 - l_{\text{mov}}) \leq \rho_i \\ & && 1 \geq (1 + l_{\text{mov}}) \geq \rho_i \\ & && \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N_e \end{aligned} \quad (7)$$

Este problema consiste en minimizar la función objetivo $C_L(p_i)$ estando sujeto a tres restricciones. La primera restricción se relaciona con la condiciones de equilibrio estático de la estructura, la segunda restringe el volumen final a una fracción del volumen inicial ($0 < V < 1$) y la última determina los valores que pueden tomar las variables de proyecto. Lo anterior llevaría a pensar que Colombia requiere de estudios de futuro, que permitan soportar los procesos de planeación estratégica y tecnológica del desarrollo nacional, regional, sectorial y empresarial. Esto se puede lograr por medio de la prospectiva tecnológica.

Como se puede ver en la definición del problema de optimización, las variables de proyecto no toman un valor de cero para la ausencia de material, sino un valor ρ_{\min} mayor que cero. Esto se debe a que las pseudodensidades nulas introducen ceros en la diagonal principal de matriz de rigidez, volviendo el sistema de ecuaciones inconsistente. En este trabajo se usó un valor $\rho_{\min} = 0,001$. La literatura no aborda con detalle la selección de este valor. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que, para $\rho_{\min} = 0,001$, los espacios vacíos en realidad están llenos de un material con módulo de elasticidad mil veces menor que el módulo del material de base.

La fracción de volumen (V) determina la máxima cantidad de volumen permitido en la topología final. Como la máxima rigidez se obtiene cuando el dominio está totalmente lleno, el algoritmo tiende a no retirar ningún material. Por tanto, tiene que incluirse una restricción en el problema que limite el volumen final. Valores pequeños de V generan una estructura delgada, pues se tiene menos material para distribuir. Valores grandes generan estructuras robustas. De allí que este parámetro se encuentre directamente relacionado con la resistencia mecánica.

El límite móvil ($0 < l_{\text{mov}} < 1$) fija el intervalo de cada subproblema, que se selecciona como una fracción del vector de diseño (ρ_i). Su correcta selección es fundamental para la convergencia del problema, pues a un determinado número de iteraciones, un valor grande del límite móvil hará que el resultado oscile alrededor del punto óptimo sin llegar a encontrarlo. Para evitar este problema, se debe implementar un mecanismo que reduzca paulatinamente l_{mov} a medida que avanzan las iteraciones. El problema de optimización es ahora lineal y se puede solucionar por medio de la PL, usando algoritmos como el Simplex [16] o el Karmarkar [17]. Estos algoritmos

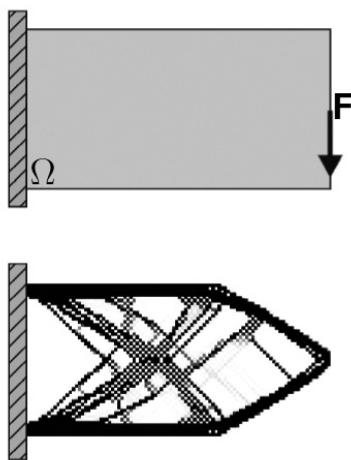
están implementados en la función Linprog de Matlab, que selecciona automáticamente entre Simplex o Karmarkar dependiendo del tamaño del problema.

3. Problemas que afectan la topología final

3.1 Inestabilidad de tablero de ajedrez

La inestabilidad de tablero de ajedrez es una topología donde elementos con $\rho=0$ se intercalan con elementos $\rho=1$. Esto ocurre porque los nodos de los elementos finitos Q4 son rígidos (transmiten momento) y una topología en forma de tablero de ajedrez también es solución del problema de optimización. La Figura 2 muestra la solución del problema de una viga en voladizo. Se puede ver que en el interior no hay una distribución continua de material, sino una estructura formada por material organizado en forma de tablero de ajedrez.

Figura 2. Inestabilidad de tablero de ajedrez



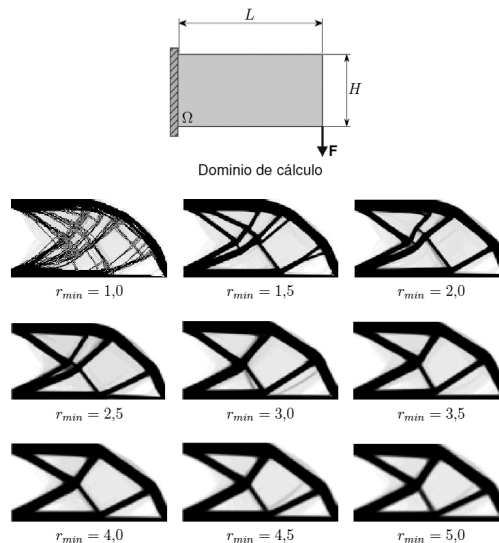
Fuente: elaboración propia.

Para solucionar la inestabilidad de tablero de ajedrez se aplica en cada iteración un filtro. El código de filtrado utilizado en este trabajo fue el propuesto por Bendsoe y Sigmund, el cual opera sobre la función objetivo, cambiando cada valor por el promedio ponderado de los elementos circundantes localizados dentro de un círculo de radio r_{\min} [1].

El término r_{\min} es un parámetro de la rutina de filtrado encargado de disminuir el problema de las inestabilidades tipo tablero de ajedrez y tiene un papel importante en el resultado de la topología final. La Figura 3 muestra la solución del problema de una viga corta en voladizo para

valores de r_{\min} entre 1.0 y 5.0, y una discretización de 200x100 elementos finitos (40602 grados de libertad). Se puede ver que el problema de las inestabilidades de tablero de ajedrez está presente en todo el dominio, pues con este radio no se realiza ningún tipo de filtrado. A medida que aumenta el r_{\min} , las inestabilidades desaparecen y se obtienen topologías más simples. Con valores de r_{\min} superiores a 3.5 se obtienen topologías muy similares, el cual es el valor recomendado en la literatura [1].

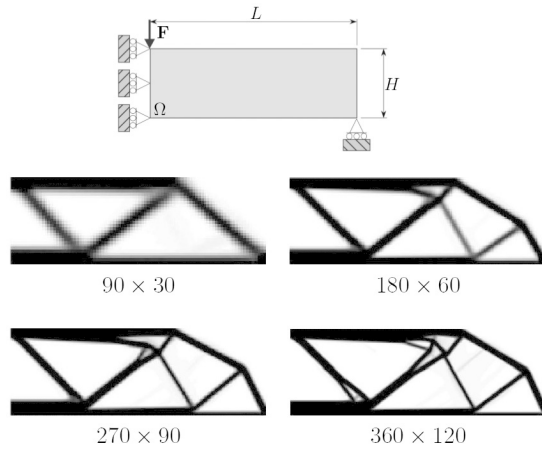
Figura 3. Efecto del r_{\min} en la topología final



Fuente: elaboración propia.

3.2 Dependencia de la malla

En la Figura 4 se muestra el resultado obtenido para una viga apoyada en los extremos con una carga central y diferentes niveles de discretización del dominio. Se puede ver claramente la influencia sobre la solución final. Cuando la discretización es mayor, se obtienen topologías más complejas, con mayores bifurcaciones de material y agujeros entre las barras. Esto ocurre porque se tiene también mayor resolución y el algoritmo realiza una optimización a nivel local, en puntos donde la distribución de esfuerzos presenta más variaciones.

Figura 4. Efecto de la discretización en la topología final

Fuente: elaboración propia.

La dependencia de la malla es un problema discutido por varios autores, dado que puede dificultar la obtención de una solución con utilidad práctica. Bendsøe, Sigmund y Kikuchi plantean una forma eficiente y simple para lograr independencia de la malla, que es el uso del radio de influencia del filtro r_{\min} como un porcentaje de la altura H del dominio de diseño [1, 18].

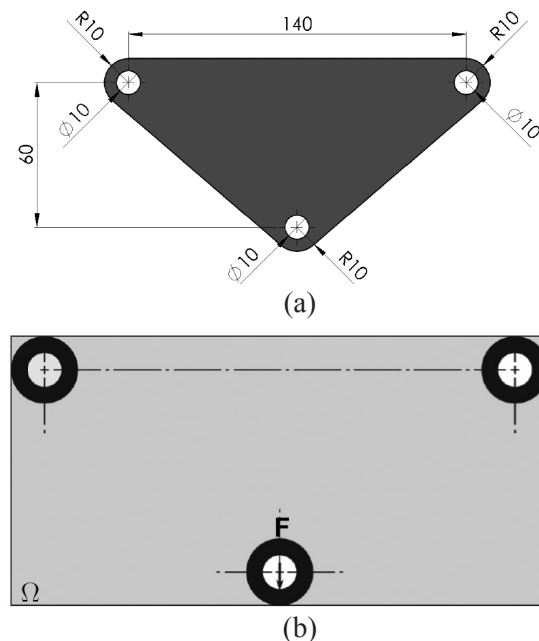
4. Aplicación de la OT en el diseño de piezas mecánicas

El método de la OT se aplicó al rediseño de una pieza mecánica con la finalidad de reducir su peso. Se considera el componente mecánico de unión de la Figura 5a, diseñado para soportar una carga vertical de 5340 N, aplicada en el agujero inferior y apoyada en los dos agujeros superiores. El material del componente es acero estructural A36 de 10 mm de espesor, que cuenta con un límite de fluencia típico de 250 MPa. Usando el software *SolidWorks* se creó un modelo CAD del componente mecánico, que permitió calcular el volumen. Como la densidad es conocida, se obtuvo un peso del componente mecánico de 590.5 gramos.

Para aplicar el método de optimización topológica al componente mecánico, se usó un dominio rectangular donde un milímetro equivale a un elemento finito, es decir, se tiene una discretización de 160×80 elementos finitos, para un total de 12800 elementos finitos y 26082 grados de libertad. Fue usado un factor de penalidad $p=3$, valor recomendado en la literatura, y el volumen final de la estructura fue fijado a 40 % del volumen inicial ($V=0.4$). El dominio posee tres zonas no optimizables, cada una con radio de 10 mm y en su interior un agujero con radio de 5

mm, representando los agujeros del componente mecánico original. Las zonas no optimizables se fijan asignando valores de $\rho=\rho_{\min}$ a los agujeros y $\rho=1$ a las zonas con presencia de material, en cada iteración.

El estado de carga es igual al del componente mecánico: restringido en los agujeros superiores y con una carga vertical aplicada en el agujero inferior. Un esquema del dominio se muestra en la Figura 5b.

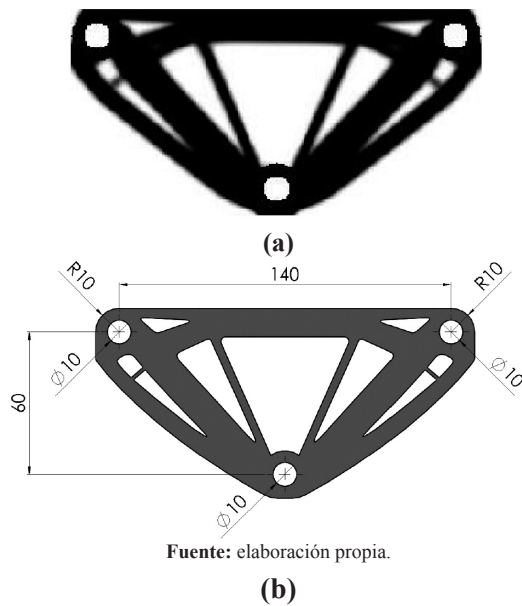
Figura 5. (a) Componente mecánico analizado (medidas en milímetros) y (b) dominio de cálculo

Fuente: elaboración propia.

La topología obtenida se muestra en la Figura 6a. Sin embargo, la estructura obtenida por OT presenta bordes difusos y se requiere un proceso de interpretación para usarla en un proceso convencional de diseño mecánico. Para la interpretación del componente mecánico se usó el software comercial *SolidWorks*. El proceso consiste en la generación de un gráfico vectorizado (Figura 6b) del componente, de acuerdo con el gráfico en mapa de bits obtenido por OT. A partir del gráfico vectorizado se genera el sólido CAD, que permite calcular nuevamente el volumen y realizar el análisis de resistencia por elementos finitos.

El componente mecánico rediseñado tiene un peso final de 447.9 gramos. La diferencia de peso entre el componente mecánico original (Figura 5a) y al que se le aplicó el método de optimización topológica (Figura 6b) es de 142.6 gramos, para una reducción de peso del 24.1 %.

Figura 6. (a) Estructura generada por optimización topológica e (b) interpretación del componente mecánico



Para verificar que ambos componentes soportan el estado de carga, considerando un factor de seguridad mínimo de 2.5, se hizo un análisis de esfuerzo por elementos finitos con el software comercial Ansys. La Figura 7a y 7b muestran la distribución del esfuerzo equivalente de Von Mises del componente original y el diseñado por OT, respectivamente.

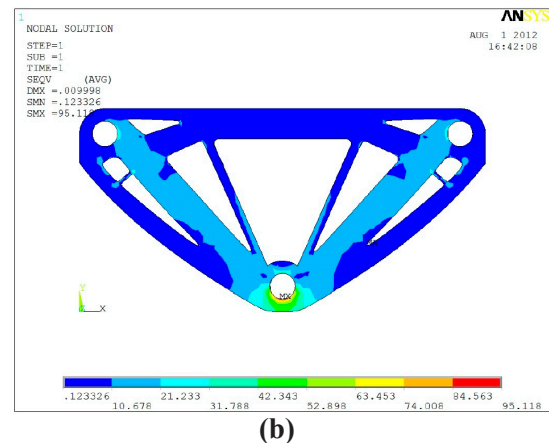
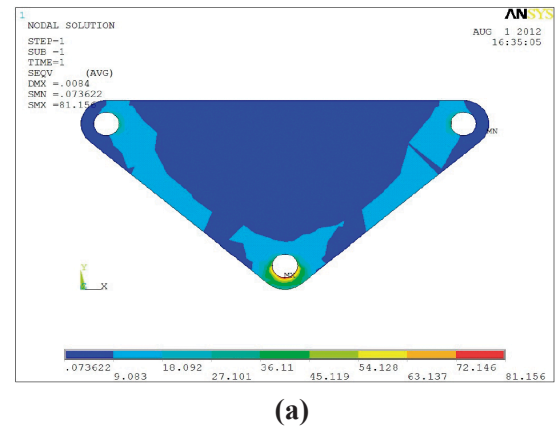
El valor del esfuerzo máximo equivalente de Von Mises para el componente mecánico original con la carga definida, fue de 81.2 MPa, situado en el punto de aplicación de la carga. Se puede notar que en el interior del componente se presentan esfuerzos pequeños, indicando que hay material de sobra. El factor de seguridad para el componente mecánico original es 3.1.

El valor del esfuerzo máximo equivalente de Von Mises del componente mecánico al que se le aplicó OT fue de 95.1 MPa, ligeramente mayor y situado en el mismo punto del componente mecánico original. La mayor cantidad de material fue removido de la región central del componente, donde se presentan los menores valores de esfuerzo. Esto muestra que el material fue removido de una manera adecuada, distribuyendo la mayor cantidad de material donde se encuentran los esfuerzos más altos. El factor de seguridad para el componente mecánico óptimo es 2.6.

El factor de seguridad está por encima del valor deseado, cumpliendo con los requisitos de diseño. Sin embargo, tiene una ligera reducción en comparación con el componente mecánico

original. Este resultado era esperado.

Figura 7. Esfuerzo equivalente de Von Mises del elemento mecánico a) original y b) rediseñado por optimización topológica.



Fuente: elaboración propia.

5. Conclusiones

En este trabajo, el problema de máxima rigidez con restricción de volumen fue implementado usando el método de la optimización topológica. El dominio de diseño rectangular fue discretizado usando elementos finitos para estado plano de esfuerzo de cuatro nodos e interpolación lineal. Para la solución del problema de optimización no lineal y multivariado fue usado el método de programación lineal secuencial, que, a su vez, fue implementado usando las rutinas de programación lineal de Matlab.

El algoritmo de cálculo desarrollado solucionó correctamente problemas test, proporcionando resultados coherentes con los reportados en la literatura. Además, fueron analizados los problemas numéricos que más afectan la topología final y se discutieron algunas técnicas para solucionarlos.

Finalmente, una pieza mecánica fue rediseñada con el propósito de reducir su peso. El algoritmo generó una estructura óptima con una geometría algo compleja, que fue interpretada para obtener un modelo CAD de la pieza mecánica optimizada. El programa de CAD permitió calcular una reducción de peso de 24.1 %. El software Ansys permitió calcular los factores de seguridad, mostrando que en el caso de la pieza optimizada se redujo un 16 %. Sin embargo, el valor final aún cumple las especificaciones de diseño.

Los resultados obtenidos muestran que la OT es una técnica muy útil en el diseño de piezas mecánicas de peso reducido. Las topologías obtenidas llevan, después de un proceso de interpretación, a piezas mecánicas más livianas, manteniendo una resistencia mecánica comparable, según el análisis estático. Las geometrías complejas que se obtienen con la OT pueden ser fácilmente fabricadas con las técnicas modernas de manufactura. ●

Referencias

- [1] Bendsøe, M. P. & Sigmund, O. (2003). *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Berlín: Springer Verlag.
- [2] Kikuchi, N., Nishiwaki, S., Fonseca, L. S. O. & Silva, E. C. N. (1998). Design optimization method for compliant mechanisms microstructure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 151, 401 -417.
- [3] Lin, J., Luo, Z. & Tong, L. (2010). A new multi-objective programming scheme for topology optimization of compliant mechanisms. *Struct Multidisc Optim* 40, 241 - 255.
- [4] Nishiwaki, S., Frecker, M. I., Min, S. & Kikuchi, N. (1998). Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 42, 535 -559
- [5] Kota, S., Joo, J., Li, Z., Rodgers, S. M. & Sniogowski, J. (2001). Design of compliant mechanisms: Applications to mems. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* 29, 7 -15.
- [6] Rubio, W. M., Silva, E. C. N. & Nishiwaki, S. (2008). Piezoresistive sensor design using topology optimization. *Struct Multidisc Optim* 36, 571 - 583.
- [7] Larsen, U. D., Sigmund, O. & Bouwstra, S. (1997). Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative poisson's ratio. *Journal of Microelectromechanical Systems* 6, 2, 99 - 106.
- [8] Pingen, G., Evgrafov, A. & Maute, K. (2007). Topology optimization of flow domains using the lattice boltzmann method. *Struct Multidisc Optim* 34, 507 - 524.
- [9] Sigmund, O. & Clausen, P. M. (2007). Topology optimization using a mixed formulation: An alternative way to solve pressure load problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196, 1874 - 1889.
- [10] Maute, K. & Allen, M. (2004). Conceptual design of aeroelastic structures by topology optimization. *Struct Multidisc Optim* 27, 27 - 42.
- [11] Logan, D. L. (2007). *A First Course in the Finite Element Method*. Thompson, Canada.
- [12] Carbonari, R. C. (2003). *Projeto de atuadores piezoelétricos flexionais usando o método de otimização topológica*. Master's thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [13] Timoshenko, S. & Goodier, J. (1970). *Theory of Elasticity*. New York: Mc Graw-Hill.
- [14] Logan, D. L. (2007). *A First Course in the Finite Element Method*. Thompson, Canada.
- [15] Lin, J., Luo, Z. & Tong, L. (2010). A new multi-objective programming scheme for topology optimization of compliant mechanisms. *Struct Multidisc Optim* 40, 241 - 255.
- [16] Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2011). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. México: Mc Graw-Hill.
- [17] Ávila, J. F. (1995). Método de karmarkar. *Revista de matemática: Teoría y Aplicaciones* 2, 1, 45 - 55.
- [18] Bendsøe, M. P. & Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71, 2, 197 - 224.